Calcul matriciel

Terminale S spécialité - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015-2016

1 Définition

Définition 1

Une **matrice de format** (n,p) est un tableau de nombres comportant n **lignes** et p **colonnes**. Ces nombres sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de format $(2,3)$.

Remarque. Le coefficient de la ligne 2 et de la colonne 3 est noté a_{23}.
Dans l'exemple ci-dessus $a_{23} = 0$.

Définition 2

La matrice transposée d'une matrice A de format (n,p) est la matrice de format (p,n), notée A^T, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Addition de deux matrices

Définition 3

On appelle somme de deux matrices de **même format** la matrice obtenue en additionnant les coefficients de **même emplacement**.

Exemple. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Définition 4

On appelle produit d'une matrice par un nombre réel la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient par ce nombre.

Exemple. $2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 10 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

4 Multiplication de deux matrices

Définition 5

Le produit d'un matrice $A = a_{ij}$ de format (n, p) par une matrice $B = b_{ij}$ de format (p, q) est la matrice $AB = c_{ij}$ de format (n, q) avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 5 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$.

$(1 \times 1) + (-5 \times 4) + (0 \times -2) = -19$
$(2 \times 1) + (3 \times 4) + (-1 \times -2) = 16$
$(1 \times 0) + (-5 \times -1) + (0 \times -3) = 5$
$(2 \times 0) + (3 \times -1) + (-1 \times -3) = 0$

Remarque. Si les matrices AB et BA sont définies, en général $AB \neq BA$.

Propriété 1 – propriété admise

A, B, C sont des matrices et k est un nombre :

$$A(BC) = (AB)C \qquad (A+B)C = AC + BC$$
$$A(B+C) = AB + AC \qquad (kA)B = A(kB) = k(AB)$$

5 Matrice carrées, matrices unités et matrices diagonales

Définition 6 – matrices carrées

On appelle **matrice carrée d'ordre *n*** toute matrice de format (n, n).

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 7 – matrices unités

On appelle **matrice unité d'ordre *n*** la matrice I, carrée d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1.

Exemple. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 4.

Définition 8 – matrices diagonales

On appelle **matrice diagonale** une matrice carrée dont tous les coefficients non nuls sont sur la diagonale principale.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

6 Puissance d'une matrice carrée

Définition 9

n est un entier naturel et A est une racine carrée.

$$A^n = \underbrace{AAA...A}_{n \text{ fois}}$$

Par convention : $A^0 = I$

Propriété 2 – propriété admise

A est une matrice diagonale d'ordre k : $A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_k \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} x_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_k^n \end{pmatrix}$

Exemple. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7 Inverse d'une matrice carrée

Définition 10

A est une racine carrée. On dit que la matrice B est inverse de A si $AB = I$ et $BA = I$.

Propriété 3

Si la matrice carrée A admet une matrice inverse, celle-ci est unique. On la note A^{-1}

Preuve. Si deux matrices B et B' vérifient $AB = I, BA = I, AB' = I, B'A = I$ alors $B'(AB) = B'I$ et donc $(B'A)B = B'I$ d'où $B = B'$.

Propriété 4

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Si $ad - bc \neq 0$, A a pour inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Si $ad - bc = 0$, A n'a pas d'inverse.

Preuve. On montre facilement que :

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I \ .$$

Remarque. $ad - bc$ s'appelle le **déterminant** de A.

Propriété 5

A, M et N sont des matrices carrées de même ordre. O est la matrice nulle de même ordre. On suppose que A est inversible.

Si $AM = O$, alors $M = O$ Si $AM = AN$, alors $M = N$.

Preuve. Si $AM = O$, alors $A^{-1}AM = A^{-1}O$ donc $M = O$
Si $AM = AN$, alors $A^{-1}AM = A^{-1}AN$ donc $M = N$.

8 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Définition 11

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :

$$(S)\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont les couples $(x; y)$ vérifiant simultanément ces deux équations.
En considérant les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit :$AX = B$.

Propriété 6

Si A est inversible, alors (S) admet un unique couple solution défini par $X = A^{-1}B$.

Preuve. Si $AX = B$, alors $A^{-1}AX = A^{-1}B$ donc $X = A^{-1}B$

Exemple. On considère le système :

$$(S)\begin{cases} -x + 4y = 9 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est : $-1 \times 2 - 4 \times 3 = -14$
Le déterminant étant non nul, il existe un unique couple de solutions :
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-14}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$